

Coordonnées cylindriques, sphériques et rotations

Jusqu'à présent, on a décrit le mouvement d'un point matériel en **coordonnées cartésiennes**. Les coordonnées cartésiennes sont souvent les plus adaptées pour décrire la dynamique d'un point matériel lorsque cette dynamique ne présente pas de symétrie particulière. Mais lorsque le point matériel se déplace par exemple sur une sphère ou un cylindre, il est plus commode d'utiliser des coordonnées plus appropriées. Pour décrire un mouvement de symétrie cylindrique on prendra des **coordonnées cylindriques** et pour décrire un mouvement de symétrie sphérique, on choisira des **coordonnées sphériques**. On peut faire le contraire, mais cela n'est pas judicieux puisque les calculs sont beaucoup plus longs. On choisit les bonnes coordonnées pour un problème spécifique avant tout pour des raisons pratiques. En choisissant les bonnes coordonnées, on simplifie considérablement la résolution mathématique du problème et on découvre plus facilement les propriétés dynamiques du mouvement.

5.1 Coordonnées cylindriques

Les **coordonnées polaires** ont été employées en premier par Bonaventura Cavalieri. Un siècle plus tard, Leonhard Euler a étendu les coordonnées polaires à l'espace à trois dimensions et a ainsi introduit les coordonnées cylindriques et sphériques. Les coordonnées polaires sont particulièrement adaptées pour décrire un mouvement circulaire dans un plan et les coordonnées cylindriques sont un choix judicieux pour décrire un mouvement qui présente une symétrie cylindrique dans l'espace. C'est par exemple le cas d'un système formé d'un feutre en mouvement relatif par rapport à un plateau horizontal circulaire (Fig. 5.1).



Bonaventura Cavalieri

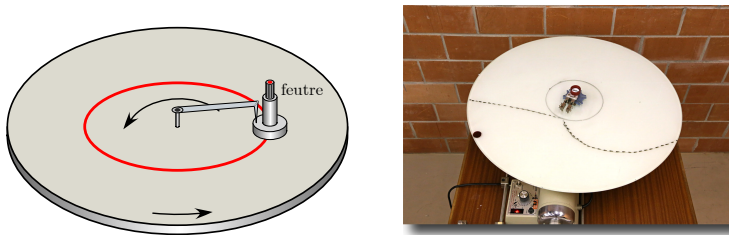


FIGURE 5.1 Lorsque le feutre est relâché, il suit une ligne droite par rapport au sol et il marque la trajectoire telle qu'elle est perçue dans le référentiel du plateau immobile ou du plateau tournant.

D'abord, on introduit les coordonnées cylindriques. Ensuite, on va définir un **repère cylindrique** lié au point matériel. On verra qu'on doit tenir compte du déplacement du repère attaché au point matériel. Il est donc nécessaire de prendre en compte le mouvement du repère cylindrique par rapport au repère cartésien. Le repère cartésien est un repère fixe alors que le repère cylindrique est un **repère mobile**. On sera alors en mesure d'exprimer les grandeurs cinématiques comme la position, la vitesse et l'accélération par rapport au repère cylindrique.

Les coordonnées cylindriques (ρ, ϕ, z) d'un point matériel P sont trois grandeurs scalaires. La première coordonnée est la distance ρ entre l'origine O et le point obtenu par projection

du point P sur le plan horizontal contenant O . La deuxième coordonnée est l'angle ϕ qui détermine l'orientation du plan vertical contenant les points O et P . La troisième coordonnée est la hauteur z du point P , c'est-à-dire la distance entre les plans horizontaux contenant respectivement l'origine O et le point matériel P (Fig. 5.2). Les coordonnées cartésiennes (x_1, x_2, x_3) s'expriment en termes des coordonnées cylindriques (ρ, ϕ, z) comme,

$$x_1 = \rho \cos \phi \quad x_2 = \rho \sin \phi \quad x_3 = z \quad (5.1)$$

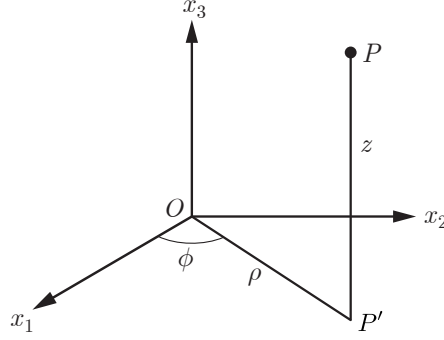


FIGURE 5.2 Coordonnées cylindriques (ρ, ϕ, z) du point matériel P .

Afin d'être en mesure de définir les repères associés aux coordonnées cylindriques, on introduit la notion de **ligne de coordonnée**. Une ligne de coordonnée est le lieu géométrique des points qui ont deux coordonnées fixes. En fixant deux coordonnées, on impose deux contraintes mathématiques — c'est-à-dire deux équations — dans l'espace à trois dimensions ce qui définit une droite ou une courbe, qui correspond à la ligne de coordonnée. Une ligne de coordonnée est orientée dans le sens croissant de la coordonnée variable. En coordonnées cylindriques, la première ligne de coordonnée (ϕ, z) est la demi-droite horizontale et radiale d'angle d'inclinaison ϕ contenue dans le plan horizontal à la hauteur z . La deuxième ligne de coordonnée (z, ρ) est le cercle horizontal de rayon ρ à la hauteur z . La troisième ligne de coordonnée (ρ, ϕ) est la demi-droite verticale contenue dans le plan vertical d'angle d'inclinaison ϕ , séparée de l'origine O par une distance ρ (Fig. 5.3).

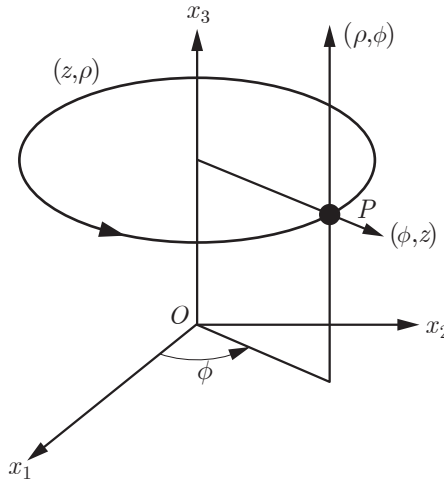


FIGURE 5.3 Lignes de coordonnées cylindriques (ϕ, z) , (z, ρ) et (ρ, ϕ) qui passent par le point matériel P .

5.1.1 Repère cylindrique

A présent, on est en mesure de définir le repère cylindrique $(\hat{\rho}, \hat{\phi}, \hat{z})$ lié au point matériel P qui est un repère orthonormé direct construit géométriquement sur les lignes de coordonnées.

Le premier vecteur $\hat{\rho}$ est un vecteur unitaire orienté le long de la première ligne de coordonnée (ϕ, z) où ρ varie. Le deuxième vecteur $\hat{\phi}$ est un vecteur unitaire tangent à la deuxième ligne de coordonnée (z, ρ) où ϕ varie. Le troisième vecteur $\hat{z}$ est un vecteur unitaire orienté le long de la troisième ligne de coordonnée (ρ, ϕ) où z varie (Fig. 5.4). Comme le repère est orthonormé, les vecteurs de base sont unitaires et orthogonaux,

$$\begin{aligned}\hat{\rho} \cdot \hat{\rho} &= \hat{\phi} \cdot \hat{\phi} = \hat{z} \cdot \hat{z} = 1 \\ \hat{\rho} \cdot \hat{\phi} &= \hat{\phi} \cdot \hat{z} = \hat{z} \cdot \hat{\rho} = 0\end{aligned}\quad (5.2)$$

De plus, ce repère est direct. Cela signifie que ces vecteurs satisfont la règle de la main droite,

$$\hat{\rho} \times \hat{\phi} = \hat{z} \quad \hat{\phi} \times \hat{z} = \hat{\rho} \quad \hat{z} \times \hat{\rho} = \hat{\phi} \quad (5.3)$$

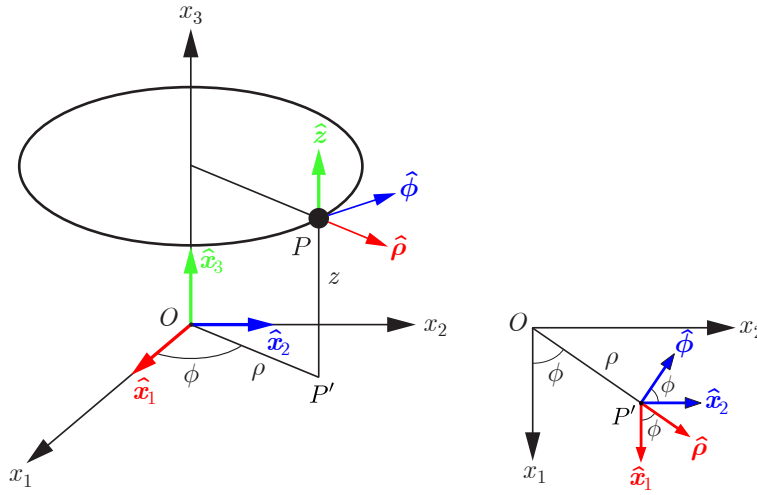


FIGURE 5.4 Repère cylindrique $(\hat{\rho}, \hat{\phi}, \hat{z})$.

Les vecteurs de base du repère cylindrique sont exprimés en termes des vecteurs de base du repère cartésien comme,

$$\begin{aligned}\hat{\rho} &= \cos \phi \hat{x}_1 + \sin \phi \hat{x}_2 \\ \hat{\phi} &= -\sin \phi \hat{x}_1 + \cos \phi \hat{x}_2 \\ \hat{z} &= \hat{x}_3\end{aligned}\quad (5.4)$$

Le repère cylindrique $(\hat{\rho}, \hat{\phi}, \hat{z})$ est un repère mobile attaché au point matériel, ce qui signifie que les vecteurs de base qui le composent peuvent changer d'orientation au cours du temps en fonction du mouvement du point matériel P . Les vecteurs $\hat{\rho}(\phi)$ et $\hat{\phi}(\phi)$ sont des fonctions de l'angle ϕ car ils changent d'orientation lorsque l'angle ϕ change alors que le vecteur $\hat{z}$ conserve son orientation verticale en tout temps.

5.1.2 Vecteur position

Le repère cylindrique est un repère mobile attaché au point matériel P en rotation autour d'un axe vertical. Ainsi, l'orientation des vecteurs unitaire $\hat{\rho}$ et $\hat{\phi}$ change au cours du temps. Le vecteur position $\mathbf{r} = \mathbf{OP}$ du point matériel P peut être exprimé comme la somme vectorielle du vecteur horizontal $\mathbf{OP'}$ et du vecteur vertical $\mathbf{P'P}$ où le point P' est la projection du point P sur le plan horizontal contenant l'origine O . Le vecteur $\mathbf{OP'}$ a une norme ρ et il est colinéaire au vecteur unitaire $\hat{\rho}$. Le vecteur $\mathbf{P'P}$ a une norme z et il est colinéaire au vecteur unitaire $\hat{z}$. Ainsi, le vecteur position $\mathbf{r}$ du point matériel P en coordonnées cylindriques s'écrit,

$$\mathbf{r} = \rho \hat{\rho} + z \hat{z} \quad (5.5)$$

où le vecteur unité $\hat{\rho}$ est une fonction de l'angle ϕ compte tenu de la première relation (5.4). Par conséquent, le vecteur position $\mathbf{r}$ est une fonction des coordonnées cylindriques ρ , ϕ et z .

5.1.3 Vecteur vitesse

Lorsqu'un vecteur change de norme ou d'orientation au cours du temps sa dérivée temporelle est non-nulle. Les vecteurs base $\hat{x}_1$, $\hat{x}_2$ et $\hat{x}_3$ du repère cartésien sont des vecteurs unitaires, ce qui signifie que leur norme est constante. Etant donné que le repère cartésien est fixe, son orientation est aussi constante. Par conséquent, la dérivée temporelle des vecteurs de base du repère cartésien est nulle. Les vecteurs de base $\hat{\rho}$, $\hat{\phi}$ et $\hat{z}$ du repère cylindrique sont des vecteurs unitaires, ce qui signifie que leur norme est constante. Vu que le repère cylindrique est mobile son orientation varie. Par conséquent, la dérivée temporelle des vecteurs de base du repère cylindrique peut être non-nulle. La dérivée temporelle des expressions (5.4) des vecteurs de base du repère cylindrique s'écrit,

$$\begin{aligned}\dot{\hat{\rho}} &= \dot{\phi} (-\sin \phi \hat{x}_1 + \cos \phi \hat{x}_2) = \dot{\phi} \hat{\phi} \\ \dot{\hat{\phi}} &= -\dot{\phi} (\cos \phi \hat{x}_1 + \sin \phi \hat{x}_2) = -\dot{\phi} \hat{\rho} \\ \dot{\hat{z}} &= \mathbf{0}\end{aligned}\quad (5.6)$$

Le vecteur vitesse $\mathbf{v}$ est la dérivée temporelle du vecteur position $\mathbf{r}$. En dérivant le vecteur position (5.5) exprimé en coordonnées cylindriques par rapport au temps, on obtient,

$$\dot{\mathbf{r}} = \dot{\rho} \hat{\rho} + \rho \dot{\hat{\rho}} + \dot{z} \hat{z} + z \dot{\hat{z}} \quad (5.7)$$

Compte tenu des expressions (5.6) de la dérivée temporelle des vecteurs de base, le vecteur vitesse (5.7) se réduit à,

$$\mathbf{v} = \dot{\rho} \hat{\rho} + \rho \dot{\phi} \hat{\phi} + \dot{z} \hat{z} \quad (5.8)$$

L'interprétation géométrique du vecteur vitesse (5.8) exprimé en coordonnées cylindriques est la suivante : le terme $\dot{\rho}$ est la vitesse radiale horizontale, le terme $\rho \dot{\phi}$ est la vitesse tangentielle horizontale et le terme $\dot{z}$ est la vitesse verticale.

5.1.4 Vecteur accélération

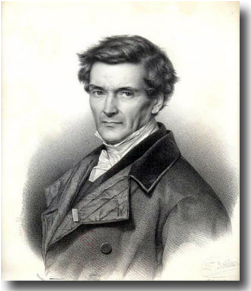
Le vecteur accélération $\mathbf{a}$ est la dérivée temporelle du vecteur vitesse $\mathbf{v}$. En dérivant le vecteur vitesse (5.8) exprimé en coordonnées cylindriques par rapport au temps, on obtient

$$\dot{\mathbf{v}} = \ddot{\rho} \hat{\rho} + \dot{\rho} \dot{\hat{\rho}} + (\dot{\rho} \dot{\phi} + \rho \ddot{\phi}) \hat{\phi} + \rho \dot{\phi} \dot{\hat{\phi}} + \ddot{z} \hat{z} + \dot{z} \dot{\hat{z}} \quad (5.9)$$

Compte tenu des expressions (5.6) de la dérivée temporelle des vecteurs de base, le vecteur accélération (5.9) se réduit à,

$$\mathbf{a} = (\ddot{\rho} - \rho \dot{\phi}^2) \hat{\rho} + (\rho \ddot{\phi} + 2\dot{\rho} \dot{\phi}) \hat{\phi} + \ddot{z} \hat{z} \quad (5.10)$$

L'interprétation physique du vecteur accélération (5.10) exprimé en coordonnées cylindriques est la suivante : le terme $\ddot{\rho}$ est l'accélération radiale, le terme $-\rho \dot{\phi}^2$ est l'accélération centripète, le terme $\rho \ddot{\phi}$ est l'accélération tangentielle, le terme $2\dot{\rho} \dot{\phi}$ est l'accélération de Coriolis et le terme $\ddot{z}$ est l'accélération verticale.



Gaspard-Gustave de
Coriolis

5.2 Coordonnées sphériques

Les coordonnées sphériques sont un choix judicieux pour décrire un mouvement qui présente une symétrie sphérique dans l'espace. C'est par exemple le cas d'une bille qui se déplace dans une glissière hémisphérique en rotation (Fig. 5.5).

Les coordonnées sphériques (r, θ, ϕ) d'un point matériel P sont trois grandeurs scalaires. La première coordonnée est la distance r entre l'origine O et le point matériel P . La deuxième coordonnée est l'angle θ qui détermine l'inclinaison par rapport à la verticale de la droite

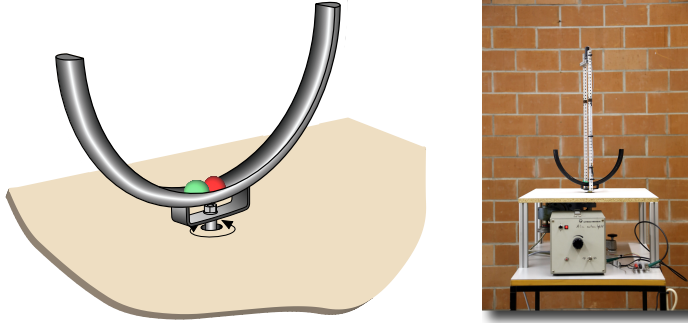


FIGURE 5.5 Une bille roule dans un anneau vertical en rotation uniforme. A faible vitesse angulaire, la bille oscille autour du bas de l'anneau. A vitesse plus élevée, la position d'équilibre se déplace.

qui contient les points O et P . La troisième coordonnée est l'angle ϕ qui détermine l'orientation du plan vertical contenant les points O et P (Fig. 5.6). Les coordonnées cartésiennes (x_1, x_2, x_3) s'expriment en termes des coordonnées sphériques (r, θ, ϕ) comme,

$$x_1 = r \sin \theta \cos \phi \quad x_2 = r \sin \theta \sin \phi \quad x_3 = r \cos \theta \quad (5.11)$$

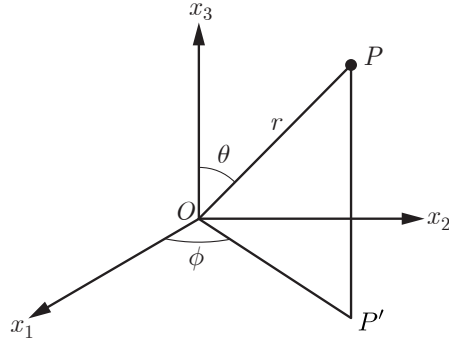


FIGURE 5.6 Coordonnées sphériques (r, θ, ϕ) du point matériel P .

En coordonnées sphériques, la première ligne de coordonnée (θ, ϕ) est la droite d'angle d'inclinaison θ par rapport à la verticale contenue dans le plan vertical d'angle d'inclinaison ϕ . La deuxième ligne de coordonnée (ϕ, r) est le cercle de rayon r contenu dans le plan vertical d'angle d'inclinaison ϕ . La troisième ligne de coordonnée (r, θ) est le cercle de rayon $r \sin \theta$ contenu dans le plan horizontal à la hauteur $r \cos \theta$ (Fig. 5.7).

5.2.1 Repère sphérique

A présent, on est en mesure de définir le repère sphérique $(\hat{r}, \hat{\theta}, \hat{\phi})$ lié au point matériel P qui est un repère orthonormé direct construit géométriquement sur les lignes de coordonnées. Le premier vecteur $\hat{r}$ est un vecteur unitaire orienté le long de la première ligne de coordonnée (θ, ϕ) où ρ varie. Le deuxième vecteur $\hat{\theta}$ est un vecteur unitaire tangent à la deuxième ligne de coordonnée (ϕ, r) où θ varie. Le troisième vecteur $\hat{\phi}$ est un vecteur unitaire tangent à la troisième ligne de coordonnée (r, θ) où ϕ varie (Fig. 5.8). Comme le repère est orthonormé, les vecteurs de base sont unitaires et orthogonaux,

$$\begin{aligned} \hat{r} \cdot \hat{r} &= \hat{\theta} \cdot \hat{\theta} = \hat{\phi} \cdot \hat{\phi} = 1 \\ \hat{r} \cdot \hat{\theta} &= \hat{\theta} \cdot \hat{\phi} = \hat{\phi} \cdot \hat{r} = 0 \end{aligned} \quad (5.12)$$

De plus, ce repère est direct. Cela signifie que ces vecteurs satisfont la règle de la main droite,

$$\hat{r} \times \hat{\theta} = \hat{\phi} \quad \hat{\theta} \times \hat{\phi} = \hat{r} \quad \hat{\phi} \times \hat{r} = \hat{\theta} \quad (5.13)$$

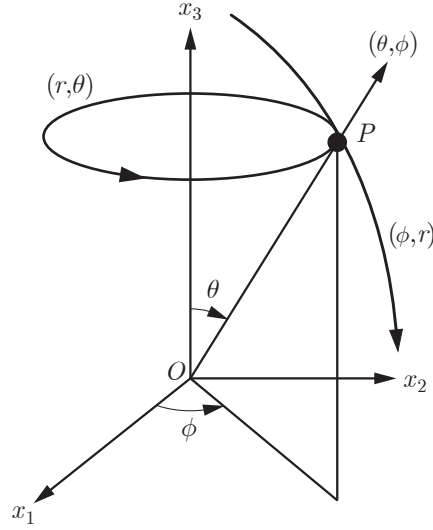


FIGURE 5.7 Lignes de coordonnées sphériques (θ, ϕ) , (ϕ, r) et (r, θ) qui passent par le point matériel P .

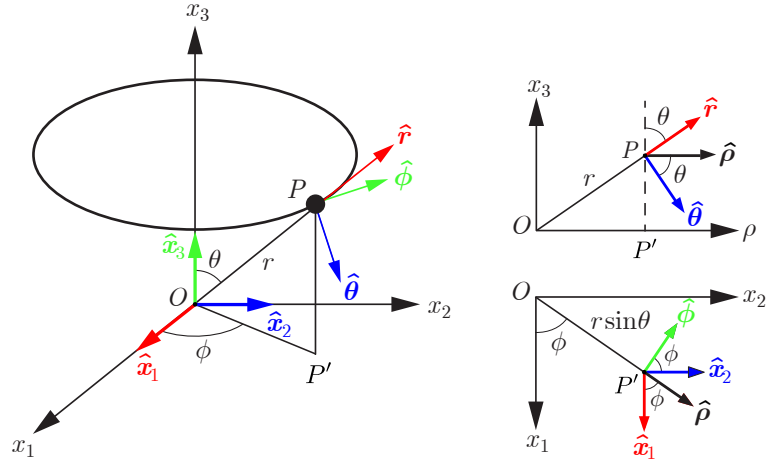


FIGURE 5.8 Repère sphérique $(\hat{r}, \hat{\theta}, \hat{\phi})$.

Les vecteurs de base du repère sphérique sont exprimés en termes des vecteurs de base du repère cartésien comme,

$$\begin{aligned}\hat{r} &= \sin \theta \cos \phi \hat{x}_1 + \sin \theta \sin \phi \hat{x}_2 + \cos \theta \hat{x}_3 \\ \hat{\theta} &= \cos \theta \cos \phi \hat{x}_1 + \cos \theta \sin \phi \hat{x}_2 - \sin \theta \hat{x}_3 \\ \hat{\phi} &= -\sin \phi \hat{x}_1 + \cos \phi \hat{x}_2\end{aligned}\tag{5.14}$$

Le repère sphérique $(\hat{r}, \hat{\theta}, \hat{\phi})$ est un repère mobile attaché au point matériel, ce qui signifie que les vecteurs de base qui le composent peuvent changer d'orientation au cours du temps en fonction du mouvement du point matériel P . Les vecteurs $\hat{r}(\theta, \phi)$ et $\hat{\theta}(\theta, \phi)$ sont des fonctions des angles θ et ϕ car ils changent d'orientation lorsque les angles θ et ϕ changent, et le vecteur $\hat{\phi}(\phi)$ est une fonction de l'angle ϕ car il change d'orientation lorsque l'angle ϕ change.

5.2.2 Vecteur position

Le repère sphérique est un repère mobile attaché au point matériel P en rotation autour d'un axe vertical et d'un axe horizontal. Ainsi, l'orientation des vecteurs unité $\hat{r}$, $\hat{\theta}$ et $\hat{\phi}$ change au cours du temps. Le vecteur position $\mathbf{r} = \mathbf{OP}$ du point matériel P a une norme r et il est colinéaire au vecteur unité $\hat{r}$. Ainsi, le vecteur position $\mathbf{r}$ du point matériel P en

coordonnées sphériques s'écrit,

$$\mathbf{r} = r \hat{\mathbf{r}} \quad (5.15)$$

où le vecteur unité $\hat{\mathbf{r}}$ est une fonction des angles θ et ϕ compte tenu de la première relation (5.14). Par conséquent, le vecteur position $\mathbf{r}$ est une fonction des coordonnées sphériques r , θ et ϕ .

5.2.3 Vecteur vitesse

Les vecteurs de base $\hat{\mathbf{r}}$, $\hat{\boldsymbol{\theta}}$ et $\hat{\boldsymbol{\phi}}$ du repère sphérique sont des vecteurs unitaires, ce qui signifie que leur norme est constante. Vu que le repère sphérique est mobile son orientation varie. Par conséquent, la dérivée temporelle des vecteurs de base du repère sphérique peut être non-nulle. La dérivée temporelle des expressions (5.14) des vecteurs de base du repère sphérique s'écrit,

$$\begin{aligned} \dot{\hat{\mathbf{r}}} &= \dot{\theta} (\cos \theta \cos \phi \hat{\mathbf{x}}_1 + \cos \theta \sin \phi \hat{\mathbf{x}}_2 - \sin \theta \hat{\mathbf{x}}_3) + \dot{\phi} \sin \theta (-\sin \phi \hat{\mathbf{x}}_1 + \cos \phi \hat{\mathbf{x}}_2) \\ &= \dot{\theta} \hat{\boldsymbol{\theta}} + \dot{\phi} \sin \theta \hat{\boldsymbol{\phi}} \\ \dot{\hat{\boldsymbol{\theta}}} &= -\dot{\theta} (\sin \theta \cos \phi \hat{\mathbf{x}}_1 + \sin \theta \sin \phi \hat{\mathbf{x}}_2 + \cos \theta \hat{\mathbf{x}}_3) + \dot{\phi} \cos \theta (-\sin \phi \hat{\mathbf{x}}_1 + \cos \phi \hat{\mathbf{x}}_2) \\ &= -\dot{\theta} \hat{\mathbf{r}} + \dot{\phi} \cos \theta \hat{\boldsymbol{\phi}} \\ \dot{\hat{\boldsymbol{\phi}}} &= -\dot{\phi} (\cos \phi \hat{\mathbf{x}}_1 + \sin \phi \hat{\mathbf{x}}_2) = -\dot{\phi} \hat{\boldsymbol{\rho}} = -\dot{\phi} (\sin \theta \hat{\mathbf{r}} + \cos \theta \hat{\boldsymbol{\theta}}) \end{aligned} \quad (5.16)$$

où la dernière expression est déduite par inspection graphique (Fig. 5.8). Le vecteur vitesse $\mathbf{v}$ est la dérivée temporelle du vecteur position $\mathbf{r}$. En dérivant le vecteur position (5.15) exprimé en coordonnées sphériques par rapport au temps, on obtient,

$$\dot{\mathbf{r}} = \dot{r} \hat{\mathbf{r}} + r \dot{\hat{\mathbf{r}}} \quad (5.17)$$

Compte tenu de l'expression (5.16) de la dérivée temporelle du premier vecteur de base, le vecteur vitesse (5.17) se réduit à,

$$\mathbf{v} = \dot{r} \hat{\mathbf{r}} + r \dot{\theta} \hat{\boldsymbol{\theta}} + r \dot{\phi} \sin \theta \hat{\boldsymbol{\phi}} \quad (5.18)$$

L'interprétation géométrique du vecteur vitesse (5.18) exprimé en coordonnées sphériques est la suivante : le terme $\dot{r}$ est la vitesse radiale, le terme $r \dot{\theta}$ est la vitesse tangentielle verticale et le terme $r \dot{\phi} \sin \theta$ est la vitesse tangentielle horizontale.

5.2.4 Vecteur accélération

Le vecteur accélération $\mathbf{a}$ est la dérivée temporelle du vecteur vitesse $\mathbf{v}$. En dérivant le vecteur vitesse (5.18) exprimé en coordonnées sphériques par rapport au temps, on obtient

$$\dot{\mathbf{v}} = \ddot{r} \hat{\mathbf{r}} + \dot{r} \dot{\hat{\mathbf{r}}} + (\dot{r} \dot{\theta} + r \ddot{\theta}) \hat{\boldsymbol{\theta}} + r \dot{\theta} \dot{\hat{\boldsymbol{\theta}}} + (\dot{r} \dot{\phi} \sin \theta + r \ddot{\phi} \sin \theta + r \dot{\phi} \dot{\theta} \cos \theta) \hat{\boldsymbol{\phi}} + r \dot{\phi} \sin \theta \dot{\hat{\boldsymbol{\phi}}} \quad (5.19)$$

Compte tenu des expressions (5.16) de la dérivée temporelle des vecteurs de base, le vecteur accélération (5.19) devient,

$$\begin{aligned} \mathbf{a} &= (\ddot{r} - r \dot{\theta}^2 - r \dot{\phi}^2 \sin^2 \theta) \hat{\mathbf{r}} + (r \ddot{\theta} + 2 \dot{r} \dot{\theta} - r \dot{\phi}^2 \sin \theta \cos \theta) \hat{\boldsymbol{\theta}} \\ &\quad + (r \ddot{\phi} \sin \theta + 2 \dot{r} \dot{\phi} \sin \theta + 2 r \dot{\phi} \dot{\theta} \cos \theta) \hat{\boldsymbol{\phi}} \end{aligned} \quad (5.20)$$

L'interprétation physique du vecteur accélération (5.20) exprimé en coordonnées sphériques est la suivante : le terme $\ddot{r}$ est l'accélération radiale, le terme $r \dot{\theta}^2$ est l'accélération centripète dans le plan vertical, le terme $r \dot{\phi}^2 \sin^2 \theta$ est la projection radiale de l'accélération centripète dans le plan horizontal, le terme $r \ddot{\theta}$ est l'accélération tangentielle dans le plan vertical, le terme $2 \dot{r} \dot{\theta}$ est la composante nodale de l'accélération de Coriolis, le terme $r \dot{\phi}^2 \sin \theta \cos \theta$ est la projection tangentielle de l'accélération centripète dans le plan horizontal, le terme $r \ddot{\phi} \sin \theta$ est l'accélération tangentielle dans le plan horizontal, les termes $2 \dot{r} \dot{\phi} \sin \theta$ et $2 r \dot{\phi} \dot{\theta} \cos \theta$ sont les composantes azimutales de l'accélération de Coriolis.

5.3 Rotations

En dynamique, un mouvement quelconque peut s'exprimer comme la combinaison d'un mouvement de translation et d'un mouvement de rotation. Il faut distinguer deux types de mouvements de rotation, le premier est le mouvement de rotation d'un point matériel – le mouvement circulaire en est un exemple particulier – et le deuxième est le mouvement de rotation propre d'un solide sur lui-même. Dans cette section, nous n'allons aborder que le premier type de mouvement de rotation. La notion de rotation d'un point matériel fait intervenir un axe et un angle de rotation. L'orientation de l'axe est définie par la règle du tire-bouchon caractérisée mathématiquement par un produit vectoriel.

La notion de rotation est très intuitive, ce qui n'est pas le cas de son expression formelle. Dans cette section, on va formaliser cette notion et l'exprimer dans un langage mathématique rigoureux. La notion de rotation est centrale pour décrire la dynamique par rapport à un repère cylindrique ou sphérique. La raison est la suivante : ces repères sont mobiles et en rotation autour d'un ou plusieurs axes. Ces repères permettent de simplifier l'expression mathématique de la dynamique en tenant compte des symétries du mouvement.

5.3.1 Rotation d'un repère direct mobile

On désire définir de manière générale la dérivée temporelle du vecteur position $\mathbf{r}$ d'un point matériel P immobile par rapport à un repère direct mobile $(\hat{\mathbf{y}}_1, \hat{\mathbf{y}}_2, \hat{\mathbf{y}}_3)$ attaché au point matériel P . Les mouvements de translation ne changent pas l'orientation du repère, seuls les mouvements de rotation peuvent modifier l'orientation des vecteurs unitaires de base du repère. On commence donc par déterminer l'évolution temporelle des vecteurs unitaires du repère lors d'un changement d'orientation. Les vecteurs de base sont des vecteurs unitaires. Ainsi,

$$\hat{\mathbf{y}}_i \cdot \hat{\mathbf{y}}_i = 1 \quad \forall \quad i = 1, 2, 3 \quad (5.21)$$

La dérivée temporelle de l'équation (5.21) s'écrit explicitement,

$$\dot{\hat{\mathbf{y}}}_i \cdot \hat{\mathbf{y}}_i + \hat{\mathbf{y}}_i \cdot \dot{\hat{\mathbf{y}}}_i = 0 \quad \text{ainsi} \quad \dot{\hat{\mathbf{y}}}_i \cdot \hat{\mathbf{y}}_i = 0 \quad \forall \quad i = 1, 2, 3 \quad (5.22)$$

Par conséquent, la dérivée temporelle des vecteurs de base est orthogonale aux vecteurs de base puisque ce sont des vecteurs unitaires. On a déjà pu constater cet état de fait pour les vecteurs de base des repères cylindrique et sphériques. D'après l'équation (5.22), il doit exister des grandeurs scalaires ω_{ij} telles que,

$$\dot{\hat{\mathbf{y}}}_i = \sum_{j=1}^3 \omega_{ij} \hat{\mathbf{y}}_j \quad \text{où} \quad \omega_{ii} = 0 \quad \forall \quad i = 1, 2, 3 \quad (5.23)$$

Les vecteurs de base sont orthogonaux. Ainsi,

$$\hat{\mathbf{y}}_i \cdot \hat{\mathbf{y}}_k = \delta_{ik} \quad \forall \quad i, k = 1, 2, 3 \quad (5.24)$$

La dérivée temporelle de l'équation (5.24) s'écrit explicitement,

$$\dot{\hat{\mathbf{y}}}_i \cdot \hat{\mathbf{y}}_k + \hat{\mathbf{y}}_i \cdot \dot{\hat{\mathbf{y}}}_k = 0 \quad \forall \quad i, k = 1, 2, 3 \quad (5.25)$$

En substituant l'expression (5.23) dans l'équation (5.25), celle-ci devient

$$\left(\sum_{j=1}^3 \omega_{ij} \hat{\mathbf{y}}_j \right) \cdot \hat{\mathbf{y}}_k + \hat{\mathbf{y}}_i \cdot \left(\sum_{j=1}^3 \omega_{kj} \hat{\mathbf{y}}_j \right) = 0 \quad \forall \quad i, k = 1, 2, 3 \quad (5.26)$$

Compte tenu de la relation d'orthogonalité (5.24), l'équation (5.26) se réduit à,

$$\omega_{ik} + \omega_{ki} = 0 \quad \text{ainsi} \quad \omega_{ki} = -\omega_{ik} \quad \forall \quad i, k = 1, 2, 3 \quad (5.27)$$

5.3.2 Formules de Poisson

D'après la relation (5.23), il existe une application linéaire qui envoie le vecteur $(\hat{\mathbf{y}}_1, \hat{\mathbf{y}}_2, \hat{\mathbf{y}}_3)$ sur le vecteur $(\dot{\hat{\mathbf{y}}}_1, \dot{\hat{\mathbf{y}}}_2, \dot{\hat{\mathbf{y}}}_3)$. Compte tenu de la condition (5.27), cette application linéaire est représentée par une matrice antisymétrique 3×3 . Elle s'écrit explicitement,

$$\begin{pmatrix} \dot{\hat{\mathbf{y}}}_1 \\ \dot{\hat{\mathbf{y}}}_2 \\ \dot{\hat{\mathbf{y}}}_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \omega_{12} & \omega_{13} \\ -\omega_{12} & 0 & \omega_{23} \\ -\omega_{13} & -\omega_{23} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \hat{\mathbf{y}}_1 \\ \hat{\mathbf{y}}_2 \\ \hat{\mathbf{y}}_3 \end{pmatrix} \quad (5.28)$$

La matrice antisymétrique est déterminée par trois grandeurs scalaires indépendantes, c'est-à-dire ω_{12} , ω_{13} et ω_{23} . Le changement d'orientation des vecteurs unitaires du repère mobile est dû à la rotation du repère. Cette rotation est décrite par le vecteur vitesse angulaire $\boldsymbol{\omega}$ qui a trois composantes scalaires. Pour que le vecteur vitesse angulaire $\boldsymbol{\omega}$ soit orienté selon la règle du tire-bouchon lors de la rotation du repère, les composantes ω_1 , ω_2 et ω_3 du vecteur $\boldsymbol{\omega}$ sont définies comme,

$$\omega_1 \equiv \omega_{23} \quad \text{et} \quad \omega_2 \equiv \omega_{31} = -\omega_{13} \quad \text{et} \quad \omega_3 \equiv \omega_{12}$$

Ainsi, l'application linéaire (5.28) est mise sous la forme,

$$\begin{pmatrix} \dot{\hat{\mathbf{y}}}_1 \\ \dot{\hat{\mathbf{y}}}_2 \\ \dot{\hat{\mathbf{y}}}_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \omega_3 & -\omega_2 \\ -\omega_3 & 0 & \omega_1 \\ \omega_2 & -\omega_1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \hat{\mathbf{y}}_1 \\ \hat{\mathbf{y}}_2 \\ \hat{\mathbf{y}}_3 \end{pmatrix} \quad (5.29)$$

Les trois composantes de l'application linéaire (5.29) s'écrivent,

$$\begin{aligned} \dot{\hat{\mathbf{y}}}_1 &= \omega_3 \hat{\mathbf{y}}_2 - \omega_2 \hat{\mathbf{y}}_3 \\ \dot{\hat{\mathbf{y}}}_2 &= \omega_1 \hat{\mathbf{y}}_3 - \omega_3 \hat{\mathbf{y}}_1 \\ \dot{\hat{\mathbf{y}}}_3 &= \omega_2 \hat{\mathbf{y}}_1 - \omega_1 \hat{\mathbf{y}}_2 \end{aligned} \quad (5.30)$$

Elles peuvent être mise sous la forme suivante,

$$\begin{aligned} \dot{\hat{\mathbf{y}}}_1 &= \omega_1 \hat{\mathbf{y}}_1 \times \hat{\mathbf{y}}_1 + \omega_2 \hat{\mathbf{y}}_2 \times \hat{\mathbf{y}}_1 + \omega_3 \hat{\mathbf{y}}_3 \times \hat{\mathbf{y}}_1 \\ \dot{\hat{\mathbf{y}}}_2 &= \omega_1 \hat{\mathbf{y}}_1 \times \hat{\mathbf{y}}_2 + \omega_2 \hat{\mathbf{y}}_2 \times \hat{\mathbf{y}}_2 + \omega_3 \hat{\mathbf{y}}_3 \times \hat{\mathbf{y}}_2 \\ \dot{\hat{\mathbf{y}}}_3 &= \omega_1 \hat{\mathbf{y}}_1 \times \hat{\mathbf{y}}_3 + \omega_2 \hat{\mathbf{y}}_2 \times \hat{\mathbf{y}}_3 + \omega_3 \hat{\mathbf{y}}_3 \times \hat{\mathbf{y}}_3 \end{aligned} \quad (5.31)$$

Le vecteur vitesse angulaire $\boldsymbol{\omega}$ est exprimé explicitement en composantes par rapport au repère mobile comme,

$$\boldsymbol{\omega} = \omega_1 \hat{\mathbf{y}}_1 + \omega_2 \hat{\mathbf{y}}_2 + \omega_3 \hat{\mathbf{y}}_3 \quad (5.32)$$

Compte tenu de l'expression (5.32) du vecteur vitesse angulaire, les équations (5.31) peuvent être mises sous la forme,

$$\begin{aligned} \dot{\hat{\mathbf{y}}}_1 &= \boldsymbol{\omega} \times \hat{\mathbf{y}}_1 \\ \dot{\hat{\mathbf{y}}}_2 &= \boldsymbol{\omega} \times \hat{\mathbf{y}}_2 \\ \dot{\hat{\mathbf{y}}}_3 &= \boldsymbol{\omega} \times \hat{\mathbf{y}}_3 \end{aligned} \quad (5.33)$$

qui sont les *formules de Poisson*,

$$\dot{\hat{\mathbf{y}}}_i = \boldsymbol{\omega} \times \hat{\mathbf{y}}_i \quad \forall \quad i = 1, 2, 3 \quad (5.34)$$

établies par Siméon Denis Poisson.

5.3.3 Symétries en physique

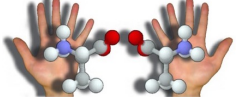
Il existe trois symétries fondamentales en physique. La symétrie par renversement du temps T , la symétrie par parité P et la symétrie par conjugaison de charge C . Un théorème de mécanique quantique, établi par Julian Schwinger en 1951, appelé le théorème CPT , affirme que le produit de ces trois symétries n'est jamais violé lors d'une interaction entre particules élémentaires. Autrement dit, les lois de la physique à l'échelle microscopique ne



Siméon Denis Poisson



Renversement du
temps



Parité



Julian Schwinger

changent pas lorsque toutes les particules impliquées dans une interaction sont remplacées par leur antiparticule, les trois directions de l'espace sont inversées et le temps est inversé. Les applications linéaires qui correspondent à ces trois symétries sont les suivantes :

- **Renversement du temps** : réversibilité microscopique

$$t \rightarrow -t \quad (5.35)$$

- **Parité** : symétrie centrale

$$(\hat{y}_1, \hat{y}_2, \hat{y}_3) \rightarrow (-\hat{y}_1, -\hat{y}_2, -\hat{y}_3) \quad (5.36)$$

- **Conjugaison de charge** : particule $\leftrightarrow$ antiparticule

$$q \rightarrow -q \quad (5.37)$$

Il est connu que les lois microscopiques violent la symétrie CP , mais il n'y a pas de preuve expérimentale de violation de la symétrie CPT . Une telle violation serait contraire à la théorie de la relativité restreinte.

5.3.4 Vecteurs polaires et axiaux

Les **vecteurs polaires** changent de signe par l'application linéaire de parité. Comme exemple, on peut citer les vecteurs position $\mathbf{r}$, vitesse $\mathbf{v}$, accélération $\mathbf{a}$, quantité de mouvement $\mathbf{p}$ et force $\mathbf{F}$, qui se transforment par l'application de parité comme,

$$\begin{array}{lll} \mathbf{r} \rightarrow -\mathbf{r} & \mathbf{v} \rightarrow -\mathbf{v} & \mathbf{a} \rightarrow -\mathbf{a} \\ \mathbf{p} \rightarrow -\mathbf{p} & \mathbf{F} \rightarrow -\mathbf{F} & \end{array} \quad (5.38)$$

Les **vecteurs axiaux** ne changent pas de signe par l'application linéaire de parité. Comme exemple, on peut citer le vecteur vitesse angulaire $\boldsymbol{\omega}$, le vecteur moment cinétique $\mathbf{L}$ et le vecteur moment de force $\mathbf{M}$ que l'on définira ultérieurement,

$$\boldsymbol{\omega} \rightarrow \boldsymbol{\omega} \quad \mathbf{L} \rightarrow \mathbf{L} \quad \mathbf{M} \rightarrow \mathbf{M} \quad (5.39)$$

Le produit scalaire de deux vecteurs polaires ou de deux vecteurs axiaux donne un scalaire.

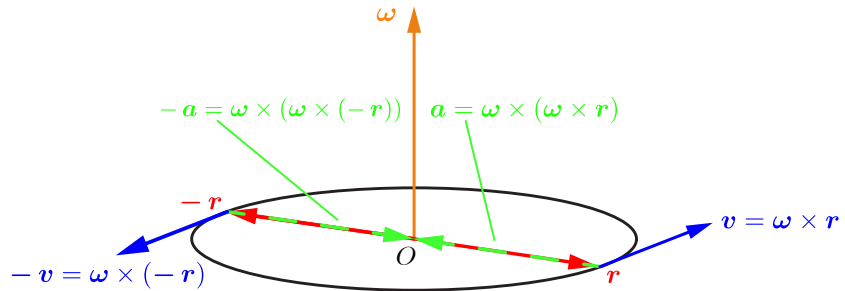


FIGURE 5.9 L'application linéaire de parité envoie les vecteurs vitesse et accélération d'un point matériel en mouvement circulaire sur leur opposé ce qui correspond à une symétrie centrale qui ne modifie pas le mouvement de rotation.

Si les deux vecteurs sont identiques, ce scalaire est le carré de la norme du vecteur. D'après les définitions (5.38) et (5.39), le produit vectoriel de deux vecteurs polaires donne un vecteur axial et le produit vectoriel d'un vecteur polaire et d'un vecteur axial donne un vecteur polaire,

$$\begin{array}{l} (\text{vecteur polaire}) \times (\text{vecteur polaire}) = \text{vecteur axial} \\ (\text{vecteur axial}) \times (\text{vecteur polaire}) = \text{vecteur polaire} \end{array} \quad (5.40)$$

Afin de montrer graphiquement l'invariance de la mécanique classique par parité, on considère un mouvement circulaire et on applique la parité par rapport au centre O : le mouvement de rotation reste le même (Fig. 5.9). Cela se traduit par le fait que la vitesse et

l'accélération changent globalement de signe ce qui revient à effectuer une symétrie centrale qui ne modifie pas le mouvement circulaire de rotation et laisse son sens inchangé,

$$\begin{aligned}\boldsymbol{v} &= \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{r} \rightarrow -\boldsymbol{v} = \boldsymbol{\omega} \times (-\boldsymbol{r}) \\ \boldsymbol{a} &= \boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{r}) \rightarrow -\boldsymbol{a} = \boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times (-\boldsymbol{r}))\end{aligned}\tag{5.41}$$